

Instruktion

Integral e- und ln-Funktion und partielle Integration



Integral der e-Funktion

Beispiele:

$$1) f(x) = e^{3-4x} \quad F(x) = e^{3-4x} \cdot \left(-\frac{1}{4}\right) + C = -\frac{1}{4}e^{3-4x} + C$$

$$2) f(x) = \frac{2}{(e^{3x-2})^2} = \frac{2}{e^{6x-4}} = 2 \cdot e^{-6x+4} \quad F(x) = 2 \cdot e^{-6x+4} \cdot \left(-\frac{1}{6}\right) + C = -\frac{1}{3}e^{-6x+4} + C$$

Integral der ln-Funktion

Beispiele:

$$1) \quad f(x) = \frac{2}{4x-3} = 2 \cdot \frac{1}{4x-3} \qquad F(x) = 2 \cdot \ln|4x-3| \cdot \frac{1}{4} + C = \frac{1}{2} \ln|4x-3| + C$$

$$2) \quad f(x) = \frac{2x^2 - 5x + 5}{2x - 3}$$

Zerlegung von $f(x)$ mittels Polynomdivision: $(2x^2 - 5x + 5) : (2x - 3) = x - 1 + \frac{2}{2x - 3}$

$$F(x) = \frac{1}{2}x^2 - x + 2 \cdot \ln|2x - 3| \cdot \frac{1}{2} + C = \frac{1}{2}x^2 - x + \ln|2x - 3| + C$$

$$3) \quad f(x) = \frac{3x}{2 - 2x^2} \qquad F(x) = \ln|2 - 2x^2| \cdot \left(-\frac{3}{4}\right) + C$$

$$\text{Es gilt: } \int \frac{f'(x)}{f(x)} dx = \ln|f(x)| + C$$

Die partielle Integration

Herleitung:

$$f(x) = u(x) \cdot v(x)$$

$$f'(x) = u'(x) \cdot v(x) + u(x) \cdot v'(x)$$

$$\Rightarrow u(x) \cdot v(x) = \int (u'(x) \cdot v(x) + u(x) \cdot v'(x)) dx$$

$$\Rightarrow u(x) \cdot v(x) = \int u'(x) \cdot v(x) dx + \int u(x) \cdot v'(x) dx$$

$$\Rightarrow \int u(x) \cdot v'(x) dx = u(x) \cdot v(x) - \int u'(x) \cdot v(x) dx$$

Beispiele:

1 Bestimmen Sie für die Funktion f mit $f(x) = x \cdot e^x$ mit $D_f = \mathbb{R}$ das unbestimmte Integral.

$$\int \underbrace{x}_{u(x)} \cdot \underbrace{e^x}_{v'(x)} dx = x \cdot e^x - \int 1 \cdot e^x dx = x \cdot e^x - e^x + C \quad C \in \mathbb{R}$$

2 Bestimmen Sie für die Funktion f mit $f(x) = x^2 \cdot e^{x+1}$ mit $D_f = \mathbb{R}$ das unbestimmte Integral.

$$\int \underbrace{x^2}_{u(x)} \cdot \underbrace{e^{x+1}}_{v'(x)} dx = x^2 \cdot e^{x+1} - \int \underbrace{2x}_{u(x)} \cdot \underbrace{e^{x+1}}_{v'(x)} dx = x^2 \cdot e^{x+1} - \left[2xe^{x+1} - \int 2 \cdot e^{x+1} dx \right] = x^2 \cdot e^{x+1} - 2xe^{x+1} + 2e^{x+1} + C \quad C \in \mathbb{R}$$

3 Bestimmen Sie für die Funktion f mit $f(x) = \ln(x)$ mit $D_f =]0; \infty[$ das unbestimmte Integral.

$$\int \underbrace{\ln(x)}_{u(x)} \cdot \underbrace{\frac{1}{x}}_{v'(x)} dx = \ln(x) \cdot x - \int \frac{1}{x} \cdot x dx = \ln(x) \cdot x - \int 1 dx = \ln(x) \cdot x - x + C \quad C \in \mathbb{R}$$

4 Bestimmen Sie für die Funktion f mit $f(x) = x \cdot \ln(x)$ mit $D_f =]0; \infty[$ das unbestimmte Integral.

$$\int \underbrace{\ln(x)}_{u(x)} \cdot \underbrace{x}_{v'(x)} dx = \ln(x) \cdot \frac{1}{2}x^2 - \int \frac{1}{x} \cdot \frac{1}{2}x^2 dx = \ln(x) \cdot \frac{1}{2}x^2 - \int \frac{1}{2}x dx = \ln(x) \cdot \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{4}x^2 + C \quad C \in \mathbb{R}$$